CAPÍTULO 11

LIMITE, CONTINUIDADE, DERIVADAS PARCIAIS, DERIVADAS DIRECIONAIS E DERIVADA DE FUNÇÃO VETORIAL DE VÁRIAS VARIÁVEIS

11.1 Introdução

Lembrem-se que estávamos estudando as funções reais de várias variáveis reais como o segundo caso particular de funções vetoriais de várias variáveis reais. O primeiro caso foi das funções vetoriais de uma variável real. Vamos agora sair dos casos particulares e voltar às funções vetoriais de várias variáveis reais. Apresentaremos agora os conceitos de limite, continuidade, derivadas parciais, derivadas direcionais e derivada e seus resultados importantes para funções vetoriais de várias variáveis reais. Porém, antes de mais nada, vamos começar definindo as operações usuais com estas funções, da mesma forma que fizemos com as funções vetoriais de uma variável real. Notem que trata-se apenas de uma repetição da Definição 2.1.1, com a única diferença de que os pontos do domínio agora estão sendo representados por X, pois são pontos de $\mathbb{R}^n$, em vez de t, quando queríamos nos referir a pontos na reta.

DEFINIÇÃO 11.1.1: Considere as funções $F, G : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e a constante $k \in \mathbb{R}$. Neste caso, definimos as seguintes funções:

a) a função $F + G : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, chamada de *soma de F e G*, dada por

$$(F + G)(X) = F(X) + G(X), \forall\, X \in D;$$

b) a função $F - G : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, chamada de *diferença entre F e G*, dada por

$$(F - G)(X) = F(X) - G(X), \forall\, X \in D;$$

c) a função $kF : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, chamada de *produto de F pela constante k*, dada por

$$(kF)(X) = kF(X), \forall\, X \in D;$$

d) a função $fF : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, chamada de *produto de F pela função escalar f*, dada por

$$(fF)(X) = f(X)F(X), \forall\, X \in D;$$

e) se $f(X) \neq 0$, $\forall X \in D$, a função $\dfrac{F}{f} : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, chamada de *quociente de F pela função escalar f*, dada por

$$\left(\frac{F}{f}\right)(X) = \frac{F(X)}{f(X)}, \forall\, X \in D;$$

f) a função $F.G : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, chamada de *produto escalar de F e G*, dada por

$$(F.G)(X) = F(X).G(X), \forall\, X \in D;$$

g) se $m = 3$, a função $F \times G : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$, chamada de *produto vetorial de F e G*, dada por

$$(F \times G)(X) = F(X) \times G(X), \forall\, X \in D.$$

Exemplo 11.1.1: Considere as funções $F(x, y) = (x^2 + y^2\ ,\ xe^y, 3x)$, $G(x, y) = (2xy\ ,\ \cos xy, x + y)$ e $f(x, y) = e^{x^2y^2}$. Calcule:

(a) $F + G$ (c) $2F$ (e) $\dfrac{F}{f}$ (f) $F.G$

(b) $F - G$ (d) fF (g) $F \times G$.

Solução: Segue diretamente das definições que:

a) $F+G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(F+G)(x, y) = F(x, y)+G(x, y) = (x^2 + y^2 + 2xy\ ,\ xe^y + \cos xy, 4x + y)$;

b) $F-G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(F-G)(x, y) = F(x, y)-G(x, y) = (x^2 + y^2 - 2xy\ ,\ xe^y - \cos xy, 2x - y)$;

c) $2F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(2F)(x, y) = 2F(x, y) = (2(x^2 + y^2)\ ,\ 2xe^y, 6x)$;

d) $fF : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(fF)(x, y) = f(x, y)F(x, y) = \left(e^{x^2y^2}(x^2 + y^2)\ ,\ xe^{y+x^2y^2}, 3xe^{x^2y^2}\right)$;

e) $\dfrac{F}{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\dfrac{F}{f}(x, y) = \dfrac{F(x, y)}{f(x, y)} = \left(e^{-x^2y^2}(x^2 + y^2)\ ,\ xe^{y-x^2y^2}, 3xe^{-x^2y^2}\right)$;

f) $F.G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(F.G)(x, y) = F(x, y).G(x, y) = 2xy(x^2+y^2)+xe^y \cos xy+3x(x+y)$;

g) $F \times G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(F \times G)(x, y) = F(x, y) \times G(x, y) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x^2 + y^2 & xe^y & 3x \\ 2xy & \cos xy & x + y \end{vmatrix}$.

□

11.2 Limites de Funções Vetoriais de Várias Variáveis Reais

Veremos agora os conceito de limite de funções vetoriais de várias variáveis, que conserva a conhecida idéia de limite, apenas com o conhecido ajuste das distâncias envolvidas. Lembre-se, mais uma vez, que se $\vec{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ e $\vec{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ são dois vetores em $\mathbb{R}^n$, a distância entre $\vec{v}$ e $\vec{u}$, $d(\vec{u}, \vec{v})$, é dada por

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = ||\vec{v} - \vec{u}|| = \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + ... + (v_n - u_n)^2},$$

onde a função $||\,.\,|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é chamada de *norma*. Lembre-se ainda, que um ponto $X_0 \in \mathbb{R}^n$ é chamado de ponto de acumulação do conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$, se toda bola aberta com centro em X_0 contém pelo menos um ponto $X \in A$, $X \neq X_0$ (Definição 5.1.4).

DEFINIÇÃO 11.2.1: (Limite) Seja F a função vetorial $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e seja X_0 um ponto de acumulação de $Dom(F)$. Dizemos que $F(X) = (f_1(X), f_2(X), ..., f_m(X))$ *tende a* $L = (l_1, ..., l_m) \in \mathbb{R}^m$ *quando* $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ *tende a* $X_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$, cuja notação é $\lim\limits_{X \to X_0} F(X) = L$, se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que,

$$0 < d(X, X_0) = ||X - X_0|| = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + ... + (x_n - x_{n0})^2} < \delta, X \in Dom(F)$$

$$\Downarrow$$

$$d(F(X), L) = ||F(X) - L|| = \sqrt{(f_1(X) - l_1)^2 + (f_2(X) - l_2)^2 + ... + (f_m(X) - l_m)^2} < \varepsilon.$$

Observe que

$$\sqrt{(f_1(X) - l_1)^2 + (f_2(X) - l_2)^2 + ... + (f_m(X) - l_m)^2} < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$(f_1(X) - l_1)^2 + ... + (f_m(X) - l_m)^2 < \varepsilon^2.$$

Desta forma, como $(f_1(X) - l_1)^2 + ... + (f_m(X) - l_m)^2$ é uma soma de quantidades positivas, temos que a soma anterior será tão pequena quanto se queira se, e somente se, cada uma das parcelas $(f_i(X) - l_i)^2$, $i = 1, \ldots, n$, for também tão pequena quanto se queira. Sendo assim, é fácil verificar que $\lim\limits_{t \to t_0} F(X) = L$ se, e somente se, $\lim\limits_{t \to t_0} f_i(X) = l_i$, para todo $i = 1, ..., m$. Confira o teorema a seguir.

TEOREMA 11.2.1: Seja F a função vetorial

$$\begin{array}{rccc} F & : & Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R}^m \\ & & X = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & F(X) = (f_1(X), f_2(X), ..., f_m(X)). \end{array}$$

e seja $L = (l_1, l_2, ..., l_m)$. Então, se X_0 é um ponto de acumulação de $Dom(F)$, temos que

$$\lim_{X \to X_0} F(X) = L \iff \lim_{X \to X_0} f_i(X) = l_i, \quad i = 1, ...m.$$

Observem portanto, que a determinação do limite de uma função vetorial de várias variáveis se reduziu a determinação de m limites de funções reais de várias variáveis. Ou seja, não há nenhuma nova técnica envolvida. Tudo o que precisamos saber para determinar limites de funções vetoriais de várias variáveis, já aprendemos quando estudamos limites de funções reais de várias variáveis.

Exemplo 11.2.1: Seja

$$F(x,y) = \left(\frac{y^4}{x^2+y^2} \ , \ (x^2+y^2) \text{ sen} \left(\frac{1}{x^2+y^2} \right) \right) \ , \ (x,y) \neq (0,0)$$

Calcule $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$.

Solução:
Considere que $F(x,y) = (f_1(x,y) \ , \ f_2(x,y))$, $(x,y) \neq (0,0)$, onde $f_1(x,y) = \dfrac{y^4}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$, e $f_2(x,y) = (x^2+y^2) \text{ sen} \left(\dfrac{1}{x^2+y^2} \right)$, $(x,y) \neq (0,0)$. Nos Exemplos 6.4.2 e 6.4.3, vimos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^2} \quad = \quad 0$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) \text{ sen} \left(\frac{1}{x^2+y^2} \right) = 0.$$

Desta forma, como os limites, quando $(x,y) \to (0,0)$, das funções coordenadas de F existem, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{y^4}{x^2+y^2} \ , \ (x^2+y^2) \text{ sen} \left(\frac{1}{x^2+y^2} \right) \right) \\ &= \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^2} \ , \ \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) \text{ sen} \left(\frac{1}{x^2+y^2} \right) \right) \\ &= (0 \ , \ 0) \,. \end{aligned}$$

$\heartsuit$

Observando que o teorema acima reduz a análise de limite de funções vetoriais de várias variáveis a análise do limite de m funções reais de várias variáveis, como consequência deste teorema, temos que continuam válidas as propriedades de limites vistas anteriormente (as que fazem sentido, é claro). Isto é, valem os teoremas abaixo.

TEOREMA 11.2.2: Seja $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e seja X_0 um ponto de acumulação do $Dom(F)$, então

$$\lim_{X \to X_0} F(X) = L \Leftrightarrow \lim_{X \to X_0} F(X) - L = 0.$$

TEOREMA 11.2.3: Seja $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e seja X_0 um ponto de acumulação do $Dom(F)$, então

$$\lim_{X \to X_0} F(X) = L \Leftrightarrow \lim_{Y \to 0} F(Y + X_0) = L.$$

TEOREMA 11.2.4: (Propriedades de Limite) Considere as funções $F, G : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tais que $\lim_{X \to X_0} F(X) = L$, $\lim_{X \to X_0} G(X) = M$, e $\lim_{t \to t_0} f(t) = k$. Neste caso, temos que

a) $\lim_{X \to X_0} (F \pm G)(X) = L \pm M$;
b) $\lim_{X \to X_0} (fF)(X) = kL$;
c) $\lim_{X \to X_0} \left(\dfrac{F}{f}\right)(X) = \dfrac{L}{k}$, se $k \neq 0$;
d) $\lim_{X \to X_0} ||F(X)|| = ||L||$;
e) $\lim_{X \to X_0} (F.G)(t) = L.M$;
f) caso $m = 3$, $\lim_{X \to X_0} (F \times G)(t) = L \times M$.

11.3 Continuidade de Funções Vetoriais de Várias Variáveis Reais

DEFINIÇÃO 11.3.1: (Continuidade) Seja $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e seja $X_0 \in Dom(F)$ um ponto de acumulação de $Dom(F)$. Dizemos que F é *contínua* em X_0, se

$$\lim_{X \to X_0} F(X) = F(X_0).$$

Exemplo 11.3.1: Seja

$$F(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{y^4}{x^2+y^2} \, , \, (x^2+y^2) \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)\right) & ; \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \qquad\qquad (0,1) & ; \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Verifique se F é contínua na origem.

Solução:
Vimos, no Exemplo 11.2.1, que

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{y^4}{x^2+y^2}\ ,\ (x^2+y^2)\ \text{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right)\\ &= \left(\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^2}\ ,\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ \text{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right)\\ &= (0\ ,\ 0)\,.\end{aligned}$$

Como,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = (0\ ,\ 0) \neq (0,1),$$

temos que f não é contínua em $(0,0)$.
Conforme veremos no teorema a seguir (Teorema 11.3.1), uma função vetorial será contínua em um ponto se, e somente se, suas funções coordenadas forem todas contínuas neste ponto. Sendo assim, vamos resolver exercício considerando agora que $F(x,y) = (f_1(x,y)\ ,\ f_2(x,y))$, onde

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

e

$$f_2(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\ \text{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Analisando que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^2} = 0 = f_1(0,0),$$

temos que f_1 é contínua em $(0,0)$. Por outro lado, como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ \text{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0 \neq f_2(0,0),$$

de modo que f_2 não é contínua em $(0,0)$. Como uma das funções coordenadas não é contínua em $(0,0)$, temos que a função vetorial F não contínua em $(0,0)$. ♡

Observe que, de acordo com o Teorema 11.2.1, se $F(X) = (f_1(X), f_2(X), ..., f_m(X))$, $X \in Dom(F)$, temos que

$$\lim_{X\to X_0} F(X) = F(X_0) \Longleftrightarrow \lim_{X\to X_0} f_i(X) = f_i(X_0), \quad i = 1, ..., m.$$

Sendo assim, temos o seguinte teorema.

TEOREMA 11.3.1: Seja $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e seja $X_0 \in Dom(F)$ um ponto de acumulação de $Dom(F)$. Então, F é contínua em X_0 se, e somente se, todas as suas funções coordenadas são contínuas em X_0.

Como consequência do teorema anterior e do Teorema ??, segue o resultado abaixo.

TEOREMA 11.3.2: Seja $k \in \mathbb{R}$ e sejam $F, G : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções contínuas em X_0. Neste caso, temos que as funções kF, fF, $F \pm G$, $F \cdot G$ e $F \times G$ são contínuas em X_0. Além disso, se $f(X_0) \neq X_0$, então $\dfrac{F}{f}$ também é contínua em X_0

Seja $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e seja $B \subseteq Dom(F)$ um conjunto de pontos de acumulação de $Dom(F)$. Dizemos então que F é *contínua* em B, se F é *contínua* em todos os pontos de B.

11.4 Derivadas Parciais de Primeira Ordem de Funções Vetoriais de Várias Variáveis Reais

Vamos definir, a seguir, as derivadas parciais de primeira da funções vetoriais de várias variáveis da mesma forma que fizemos para funções reais de várias variáveis.

DEFINIÇÃO 11.4.1: (Derivadas Parciais de Primeira Ordem) Seja

$$\begin{array}{rcl} F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ X = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & F(X) = (f_1(X), f_2(X), ..., f_m(X)) \end{array}.$$

Definimos a derivada parcial de F com respeito a variável x_i, no ponto $X_0 = (x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0}) \in A(aberto) \subseteq Dom(F)$, denotada por $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}(X_0)$, como

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(X_0) \quad = \quad \lim_{h \to 0} \frac{F(x_{10}, ..., x_{i0} + h, ..., x_{n0}) - F(x_{10}, ..., x_{i0}, ..., x_{n0})}{h},$$

se este limite existe.

Observe que, como o limite de uma função vetorial, quando ele existe, é o vetor formado pelos limites de cada uma das suas funções coordenadas em suas respectivas posições, ou seja, ele é calculado tomando-se os limites de cada uma de suas funções coordenadas, temos que

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(X_0) \;\; = \;\; \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(X_0), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(X_0)\right).$$

Exemplo 11.4.1: Calcule as derivadas parciais da função $F(x,y) = \left(x^3y^2 \;,\; xye^{y^2}\right)$.

Solução: Neste caso, temos que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \;\; = \;\; \left(3x^2y^2 \;,\; ye^{y^2}\right)$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \;\; = \;\; \left(2x^3y \;,\; xe^{y^2} + 2xy^2e^{y^2}\right)$$

♡

Vamos agora definir funções vetoriais de classe C^1. A definição é essencialmente a mesma que foi apresentada para funções reais.

DEFINIÇÃO 11.4.2: Considere a função $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Se as derivadas parciais de primeira ordem $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, $i = 1, ..., n$, existem para todo $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(F)$ e elas são contínuas em X_0, dizemos que F é de classe C^1 em X_0. Se as derivadas parciais de primeira ordem $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, $i = 1, ..., n$, são contínuas para todo $X \in A$, dizemos que F é de classe C^1 em A.

Observação 11.4.1: Observe que, de acordo com observação feita após a definição de derivadas parciais de funções vetoriais, dada uma função vetorial F, temos que todas as suas derivadas parciais de primeira ordem existem no aberto $A \subseteq Dom(F)$ e são contínuas em $X_0 \in A$ se e só se todas as derivadas parciais de primeira ordem de todas as suas funções coordenadas existem no aberto $A \subseteq Dom(F)$ e são contínuas em $X_0 \in A$. Sendo assim, temos que F é de classe C^1 em X_0 se, e somente se, todas as suas funções coordenadas são de classe C^1 em X_0. Da mesma forma, todas as suas derivadas parciais de primeira ordem de uma função F existem e são contínuas para todo $X \in A$ se e só se todas as derivadas parciais de primeira ordem de todas as suas funções coordenadas existem e são contínuas em para todo $X \in A$. Portanto, temos que F é de classe C^1 em A se, e somente se, todas as suas funções coordenadas são de classe C^1 em A.

11.5 Derivada e Diferencial de Funções Vetoriais de Várias Variáveis Reais

Lembre-se que, ao estudarmos as funções reais de várias variáveis, encontramos que a generalização apropriada de derivada para estas funções era de que a função $f : Dom(f) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é *diferenciável* em $X_0 \in A(aberto) \subseteq Dom(f)$ se existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$f(X_0 + H) = f(X_0) + T(H) + erro(H),$$

onde

$$\lim_{||H|| \to 0} \frac{erro(H)}{||H||} = 0.$$

A adaptação do conceito de derivada para as funções vetoriais de várias variáveis fica agora bastante imediata. Como a imagem destas funções é um subconjunto de $\mathbb{R}^m$, basta alterarmos a existência de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ para a existência de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Além disso, também devemos atentar para o fato de que a função *erro* também possui imagem em $\mathbb{R}^m$. Confira a definição a seguir.

DEFINIÇÃO 11.5.1: A função $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é *diferenciável* em $X_0 \in A(aberto) \subseteq Dom(F)$ se existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que

$$F(X_0 + H) = F(X_0) + T(H) + erro(H),$$

onde

$$\lim_{||H|| \to 0} \frac{erro(H)}{||H||} = \vec{0}.$$

A transformação linear T é denominada *diferencial* de F em X_0.

Conforme mencionado anteriormente, fixadas as bases de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é representada de forma única por uma matriz $m \times n$. Desta forma, se a função $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $X_0 \in A(aberto) \subseteq Dom(F)$, utilizando-se as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, a transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, a qual a definição de derivada se refere, pode ser representada de forma única por uma matriz $M \in \mathcal{M}_{m\times n}$. Esta matriz que representa T é chamada de *derivada de F em X_0* e é denotada por $DF(X_0)$, $F'(X_0)$ ou $d_{X_0}F$. Abaixo daremos uma definição equivalente à Definição 11.5.1, utilizando a matriz no lugar da transformação linear.

DEFINIÇÃO 11.5.2: A função $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é *diferenciável* em $X_0 \in A(aberto) \subseteq Dom(F)$ se existe uma matriz $M \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tal que

$$F(X_0 + H) = F(X_0) + M.H + erro(H),$$

onde

$$\lim_{||H|| \to 0} \frac{erro(H)}{||H||} = \vec{0},$$

onde (.) é o produto matricial.

A matriz $M \in \mathcal{M}_{m\times n}$ é chamada de *derivada de F em X_0* e é denotada por $DF(X_0)$, $F'(X_0)$ ou $d_{X_0}F$.

Exemplo 11.5.1: Dado $F(x,y,z) = (x+y, 2z, 2x+2)$, mostre que a derivada de F em um ponto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ é dada por

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solução: Devemos mostrar que

$$\lim_{||(h,k,r)||\to 0} \frac{erro(h,k,r)}{||(h,k,r)||} = \lim_{(h,k,r)\to(0,0,0)} \frac{erro(h,k,r)}{\sqrt{h^2+k^2+r^2}} = \vec{0}.$$

Temos então, que

$$\lim_{(h,k,r)\to(0,0,0)} \frac{erro(h,k,r)}{\sqrt{h^2+k^2+r^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k,r)\to(0,0,0)} \frac{F(x+h,y+k,z+r) - F(x,y,z) - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \\ r \end{pmatrix}}{\sqrt{h^2+k^2+r^2}}$$

$$= \lim_{(h,k,r)\to(0,0,0)} \frac{\begin{pmatrix} x+h+y+k \\ 2z+2r \\ 2x+2h+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x+y \\ 2z \\ 2x+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h+k \\ 2r \\ 2h \end{pmatrix}}{\sqrt{h^2+k^2+r^2}}$$

$$= \lim_{(h,k,r)\to(0,0,0)} \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{h^2+k^2+r^2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

♡

Observe que, conforme esperado, no exemplo anterior, obtivemos que o $erro(h,k,r)$ é identicamente nulo, uma vez que F é uma transformação afim, representada na base canônica de $\mathbb{R}^3$ ($e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ e $e_3 = (0,0,1)$), por

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Abaixo vamos definir diferenciabilidade em um conjunto aberto.

DEFINIÇÃO 11.5.3: Se F é diferenciável em todos os pontos do aberto $A \subseteq Dom(F)$, dizemos que F é diferenciável em A.

A seguir, temos o resultado importantíssimo e conhecido de que diferenciabilidade implica em continuidade. Note que a demonstração apresentada quando vimos este resultado para funções reais de várias variáveis reais não levou em conta em nenhum momento a particularidade da função ser real. A demonstração no caso das funções vetoriais é, portanto, a mesma.

TEOREMA 11.5.1: Se $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $X_0 \in A(aberto) \subseteq Dom(F)$, então F é contínua em X_0.

Observe que, no exemplo anterior, nos foi pedido apenas para comprovar que uma transformação linear era de fato a derivada da função. Tal como acontecia com funções reais de várias variáveis, temos uma candidata natural à derivada, que é a matriz das derivadas parciais de F. Confira o resultado a seguir.

TEOREMA 11.5.2: Seja

$$\begin{array}{rcl} F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ X = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & F(X) = (f_1(X), f_2(X), ..., f_m(X)) \end{array}$$

Se F é diferenciável em $X_0 \in A(aberto) \subseteq Dom(F)$, então F admite todas as derivadas parciais de primeira ordem em X_0 e, utilizando-se as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, a derivada da F em X_0, $DF(X_0)$, é dada por

$$DF(X_0) = (m_{ij}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0)\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_0) & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(X_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(X_0) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(X_0) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(X_0) \end{pmatrix}.$$

Quando vimos este resultado para funções reais de várias variáveis reais, observe que sua demonstração não levou em conta em nenhum momento a particularidade da função ser real. A demonstração no caso das funções vetoriais é, portanto, essencialmente a mesma.

Observação 11.5.1: A matriz acima é chamada de *Matriz Jacobiana* de F em X_0.

Observação 11.5.2: Observe que a matriz das derivadas parciais de primeira ordem de F pode ser escrita em função dos gradientes das funções coordenadas. Nesta representação, os gradientes serão interpretados, não como um vetor em $\mathbb{R}^m$, mas como uma matriz de 1 linha e m colunas. De fato, dada uma função vetorial

$$\begin{array}{lcl} F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ X = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & F(X) = (f_1(X), f_2(X), ..., f_m(X)) \end{array}$$

que admite todas as derivadas parciais de primeira ordem em $X_0 \in A(aberto) \subseteq Dom(F)$, segue que

$$(m_{ij}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0)\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_0) & \dots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(X_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(X_0) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(X_0) & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(X_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(X_0) \\ \nabla f_2(X_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(X_0) \end{pmatrix}.$$

Exemplo 11.5.2: Determine a matriz das derivada parciais de primeira ordem da função

$$F(x, y) = (f_1(x, y)\,,\, f_2(x, y)) = (x^2 + y^2 - 2, x^2 - y^2 - 1).$$

Solução: A matriz das derivadas parciais de primeira ordem de F é dada por

$$(m_{ij}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, y)\right) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}.$$

♡

Exemplo 11.5.3: Determine a matriz das derivadas parciais de primeira ordem da função da função

$$F(x, y, z) = (f_1(x, y, z)\,,\, f_2(x, y, z)) = (xyz, x^2 + y^2 + z^2).$$

Solução: A matriz das derivadas parciais de primeira ordem de F é dada por

$$(m_{ij}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, y, z)\right) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}.$$

♡

Exemplo 11.5.4: Determine a matriz das derivadas parciais de primeira ordem da função

$$F(x,y,z) = (f_1(x,y,z)\,,\, f_2(x,y,z)\,,\, f_3(x,y,z)) = (x+y+z, x^2+y^2+z^2, x^3+y^3+z^3).$$

Solução: A matriz das derivadas parciais de primeira ordem de F é dada por

$$(m_{ij}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x,y,z)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{pmatrix}.$$

$\heartsuit$

De posse do Teorema 11.5.2, vamos enunciar o correspondente ao Corolário 6.3.1 para a determinação se uma função vetorial de várias variáveis é ou não diferenciável em um ponto.

COROLÁRIO 11.5.1: A função

$$\begin{array}{rcl} F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ X = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & F(X) = (f_1(X), f_2(X), ..., f_m(X)) \end{array}$$

é diferenciável em $X_0 \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(F)$ se, e somente se,

(a) F admite todas as derivadas parciais de primeira ordem em X_0, ou seja, existe a matriz das derivadas parciais de primeira ordem de F em X_0, $(m_{ij}) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0)\right)$;

(b) $\lim_{||H|| \to 0} \dfrac{erro(H)}{||H||} = \lim_{||H|| \to 0} \dfrac{F(X_0+H) - F(X_0) - \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(X_0)\right).H}{||H||} = \vec{0}$

(onde o produto (.) é um produto entre matrizes.)

Suponha que a função vetorial de várias variáveis

$$\begin{array}{rcl} F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ X = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & F(X) = (f_1(X), f_2(X), ..., f_m(X)) \end{array}$$

é uma função que admite todas as derivadas parciais em $X_0 \in A(aberto) \subseteq Dom(F)$. Desta forma, pelo Corolário 11.5.1, temos que F é diferenciável em X_0 se

$$\lim_{||H|| \to 0} \frac{erro(H)}{||H||} = 0.$$

Utilizando-se agora a Observação 11.5.2, para escrever $erro(H)$, segue que,

$$erro(H) = \begin{pmatrix} erro_1(H) \\ erro_2(H) \\ \vdots \\ erro_m(H) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(X_0+H) \\ f_2(X_0+H) \\ \vdots \\ f_m(X_0+H) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f_1(X_0) \\ f_2(X_0) \\ \vdots \\ f_m(X_0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \nabla f_1(X_0) \\ \nabla f_2(X_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(X_0) \end{pmatrix} .H.$$

onde (.) representa uma multiplicação matricial e, portanto, temos que

$$erro(H) = \begin{pmatrix} erro_1(H) \\ erro_2(H) \\ \vdots \\ erro_m(H) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(X_0+H) - f_1(X_0) - \nabla f_1(X_0).H \\ f_2(X_0+H) - f_2(X_0) - \nabla f_2(X_0).H \\ \vdots \\ f_m(X_0+H) - f_m(X_0) - \nabla f_m(X_0).H \end{pmatrix},$$

onde (.) representa o produto interno. Desta forma, concluímos que

$$\lim_{||H||\to 0} \frac{erro(H)}{||H||} = 0,$$

se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} \lim_{||H||\to 0} \dfrac{erro_1(H)}{||H||} \\ \lim_{||H||\to 0} \dfrac{erro_2(H)}{||H||} \\ \vdots \\ \lim_{||H||\to 0} \dfrac{erro_1(H)}{||H||} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{||H||\to 0} \dfrac{f_1(X_0+H) - f_1(X_0) - \nabla f_1(X_0).H}{||H||} \\ \lim_{||H||\to 0} \dfrac{f_2(X_0+H) - f_2(X_0) - \nabla f_2(X_0).H}{||H||} \\ \vdots \\ \lim_{||H||\to 0} \dfrac{f_m(X_0+H) - f_m(X_0) - \nabla f_m(X_0).H}{||H||} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Colocado desta forma, vemos facilmente que F é diferenciável se, e somente se, todas as suas funções coordenadas são diferenciáveis.

COROLÁRIO 11.5.2: A função

$$\begin{array}{rcl} F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ X = (x_1, x_2, ..., x_n) & \mapsto & F(X) = (f_1(X), f_2(X), ..., f_m(X)) \end{array}$$

é diferenciável em $X_0 \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(F)$ se, e somente se, suas funções coordenadas f_i, $i = 1, \cdots, m$, são todas diferenciáveis em X_0. Além disto,

$$DF(X_0) = \begin{pmatrix} Df_1(X_0) \\ Df_2(X_0) \\ \vdots \\ Df_m(X_0) \end{pmatrix},$$

onde $Df_i(X_0)$, $i = 1, \cdots, m$, representam as derivadas das funções coordenadas no ponto X_0.

Exemplo 11.5.5: Seja

$$F(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{y^4}{x^2+y^2} \; , \; (x^2+y^2) \text{ sen} \left(\dfrac{1}{x^2+y^2} \right) \right) & ; \; (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & ; \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Verifique que F é diferenciável na origem e forneça sua derivada na origem.

Solução: Considere que $F(x,y) = (f_1(x,y) \; , \; f_2(x,y))$, onde

$$f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2} & ; \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

e

$$f_2(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \text{ sen} \left(\dfrac{1}{x^2+y^2} \right) & ; \; (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & ; \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Conforme visto nos Exemplo ?? e ??, as funções f_1 e f_2 são diferenciáveis na origem e

$$Df_1(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$Df_2(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Desta forma, pelo Corolário 11.5.2, temos que F é diferenciável na origem. Além disso.

$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} Df_1(0,0) \\ Df_2(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

♡

Com tudo o que foi exposto acima, é natural concluir que, tal como acontecia com funções reais de várias variáveis, ser de classe C^1 é uma condição suficiente para garantir a diferenciabilidade de funções vetoriais de várias variáveis. Confira o teorema a seguir.

TEOREMA 11.5.3: Seja $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e seja $X_0 \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(F)$. Se F é de classe C^1 em X_0, então F diferenciável em X_0.

Exemplo 11.5.6: Verifique se a função $F(x,y) = (x^2 + y^2 - 2, x^2 - y^2 - 1)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Caso seja, determine $DF(x,y)$.

Solução: Como todas as funções coordenadas de F são polinômios, elas são naturalmente de classe C^1. Sendo assim, F classe C^1. Portanto, pelo Teorema 11.5.3, temos que F é diferenciável e sua derivada é dada pela matriz das derivadas parciais de F em (x,y). Isto é

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}.$$

♡

Exemplo 11.5.7: Verifique se a função $F(x,y,z) = (xyz, x^2 + y^2 + z^2)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^3$. Caso seja, determine $DF(x,y,z)$.

Solução: Como todas as funções coordenadas de F são polinômios, elas são naturalmente de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Sendo assim, F classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Portanto, pelo Teorema 11.5.3, temos que F é diferenciável em $\mathbb{R}^3$e sua derivada é dada pela matriz das derivadas parciais de F em $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Isto é

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix},$$

$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

♡

Exemplo 11.5.8: Verifique se a função $F(x,y,z) = (x+y+z, x^2+y^2+z^2, x^3+y^3+z^3)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^3$. Caso seja, determine $DF(x,y,z)$.

Solução: Como todas as funções coordenadas de F são polinômios, elas são naturalmente de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Sendo assim, F classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Portanto, pelo Teorema 11.5.3, temos que F é diferenciável em $\mathbb{R}^3$ e sua derivada é dada pela matriz das derivadas parciais de F em (x,y). Isto é

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{pmatrix},$$

$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

♡

11.6 Aproximação Linear

Seguindo o mesmo procedimento realizado quando vimos derivada de funções reais de várias variáveis, temos que, se $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função diferenciável em $X_0 \in A$(aberto) $\subseteq Dom(F)$, então, a transformação afim

$$L(X) = F(X_0) + DF(X_0).(X - X_0), \quad X \in \mathbb{R}^n,$$

onde (.) representa uma multiplicação matricial, é função afim que melhor aproxima F numa vizinhança do ponto X_0, no sentido de que é a única função afim que aproxima F nesta vizinhança, onde o erro resultante da aproximação de $F(X)$ por $L(X)$ tende a zero mais rápido que $||X - X_0||$, quando $X \to X_0$.

Exemplo 11.6.1: Determine a função afim que melhor a proxima a função $F(x, y) = (2x + x^2y^2\ ,\ \ \mathrm{sen}\,(x^2y)\ ,\ xe^{3y})$ numa vizinhança do ponto $(1, 0)$.

Solução: Como a primeira função coordenada de F é um polinômio, a segunda é a composta de um seno com um polinômio e a terceira e o produto de um polinômio com a composta de uma exponencial com um polinômio, elas são naturalmente de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Sendo assim, F é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3$. Portanto, pelo Teorema 11.5.3, temos que F é diferenciável em $\mathbb{R}^3$ e sua derivada é dada pela matriz das derivadas parciais de primeira ordem de F em (x, y). Isto é

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + 2xy^2 & 2x^2y \\ \cos(x^2y)2xy & \cos(x^2y)x^2 \\ e^{3y} & 3xe^{3y} \end{pmatrix},$$

$(x, y) \in \mathbb{R}^3$. Portanto,

$$DF(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, temos que a transformação afim que melhor aproxima a função F uma vizinhança de ponto $(1, 0)$ é dada por

$$\begin{aligned} L(x, y) &= F(1, 0) + DF(1, 0).\begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x - 2 \\ y \\ x - 1 + 3y \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 2x \\ y \\ x + 3y \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

♡

11.7 Derivadas Parciais de Ordens Superiores de Funções Vetoriais de Várias Variáveis Reais

Da mesma forma que fizemos com funções reais de várias variáveis, também podemos definir derivadas parciais de ordens superiores para funções vetoriais de várias variáveis. De fato, dependendo da função F, podemos ter que as funções $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, $i = 1, ..., m$ também são funções de várias variáveis definidas em abertos, que possuem derivadas parciais. Neste caso, teremos as *derivadas parciais de segunda ordem da função vetorial F.* A notação para as derivadas parciais de segunda ordem de funções vetoriais é a mesma utilizada para funções reais. Sendo assim, se F possui derivadas parciais de segunda ordem no aberto A, temos que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(X_0) = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_j \partial x_i}(X_0), \dots, \frac{\partial^2 f_m}{\partial x_j \partial x_i}(X_0) \right), \quad X_0 \in A, \ i, j = 1, ..., n.$$

Exemplo 11.7.1: Calcule todas as derivadas parciais de segunda ordem da função $F(x, y) = \left(x^3y^2 \ , \ xye^{y^2} \right)$.

Solução: Vamos inicialmente determinar as derivadas parciais de primeira ordem da função f.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \left(3x^2y^2 \ , \ ye^{y^2} \right)$$

e

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \left(2x^3y \ , \ xe^{y^2} + 2xy^2e^{y^2} \right)$$

Agora, podemos passar às derivadas parciais de segunda ordem.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) &= \left(6xy^2 \ , \ 0 \right) \\
\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) &= \left(6x^2y \ , \ e^{y^2} + 2y^2e^{y^2} \right) \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) &= \left(6x^2y \ , \ e^{y^2} + 2y^2e^{y^2} \right) \\
\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, y) &= \left(2x^3y \ , \ 2xye^{y^2} + 4xye^{y^2} + 4xy^3e^{y^2} \right).
\end{aligned}$$

♡

Observação 11.7.1: As derivadas parciais de ordem maior do que dois são definidas de forma análoga. Por exemplo, as derivadas parciais de terceira ordem de uma função F no aberto $A \subseteq Dom(F)$ é dada por

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k}(X_0) = \left(\frac{\partial^3 f_1}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k}(X_0), \dots, \frac{\partial^3 f_m}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k}(X_0) \right), \quad X_0 \in A, \ i, j, k = 1, ..., n.$$

Também temos, no contexto das funções vetoriais de várias variáveis, o conceito de funções de classe C^k. Confira a definição a seguir.

DEFINIÇÃO 11.7.1: Considere a função $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Se as derivadas parciais até ordem k existem para todo $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in A(\text{aberto}) \subseteq Dom(F)$ e elas são contínuas em $X_0 \in A$, dizemos que F é de classe C^k em X_0. Se as derivadas parciais até ordem k são contínuas para todo $X \in A$, dizemos que F é de classe C^k em A.

Observação 11.7.1: Observe que, de acordo com definição de derivadas parciais de funções vetoriais, dada uma função vetorial F, temos que todas as suas derivadas parciais até ordem k existem no aberto $A \subseteq Dom(F)$ e são contínuas em $X_0 \in A$ se e só se todas as derivadas parciais até ordem k de todas as suas funções coordenadas existem no aberto $A \subseteq Dom(F)$ e são contínuas em $X_0 \in A$. Sendo assim, temos que F é de classe C^k em X_0 se, e somente se, todas as suas funções coordenadas são de classe C^k em X_0. Da mesma forma, todas as suas derivadas parciais de uma função F até ordem k existem e são contínuas para todo $X \in A$ se e só se todas as derivadas parciais até ordem k de todas as suas funções coordenadas existem e são contínuas para todo $X \in A$. Portanto, temos que F é de classe C^k em A se, e somente se, todas as suas funções coordenadas são de classe C^k em A.

Em particular, de acordo com a observação acima, temos que uma função vetorial F é de classe C^2 se, e somente se, todas as suas funções coordenadas são de classe C^2. Desta forma, aplicando o Teorema de Schwarz para a funções coordenadas, temos a igualdade entre as derivadas parciais mistas de segunda ordem de F. Ou seja, o Teorema de Schwarz permanece válido para funções vetoriais também. Ele encontra-se enunciado a seguir.

TEOREMA 11.7.1: (Teorema de Schwarz) Considere a função $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e seja $X_0 \in A(aberto) \subseteq Dom(F)$. Se F é de classe C^2 em X_0, temos que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(X_0) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_i}(X_0), \qquad i, j = 1, ..., n, \;\; i \neq j.$$

11.8 Derivadas Direcionais de Funções Vetoriais de Várias Variáveis Reais

DEFINIÇÃO 11.8.1: Seja $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função vetorial de várias variáveis e seja $\vec{u}$ um vetor unitário em $\mathbb{R}^n$. A *derivada direcional* de F no ponto X_0 na direção do vetor $\vec{u}$, denotada por $\dfrac{\partial F}{\partial \vec{u}}$, é a função vetorial definida por

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(X_0) = \lim_{t \to 0} \frac{F(X_0 + t\vec{u}) - F(X_0)}{t}.$$

O domínio de $\dfrac{\partial F}{\partial \vec{u}}$ é o subconjunto de $Dom(F)$ para o qual o limite acima existe.

Da mesma forma que, para funções reais de várias variáveis diferenciáveis, existe um conexão entre derivada direcional e vetor gradiente, no caso de funções vetoriais de várias variáveis, existe um conexão entre derivada direcional e a matriz jacobiana. Confira o teorema a seguir.

TEOREMA 11.8.1: Se $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma função diferenciável em $X_0 \in A(\text{Aberto}) \subseteq Dom(F)$, então

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(X_0) = DF(X_0).\vec{u},$$

para todo vetor unitário $\vec{u}$ em $\mathbb{R}^n$, onde (.) é o produto matricial e $DF(X_0)$ é a matriz jacobiana de F.

Demonstração: temos que

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(X_0) \quad = \quad \lim_{t \to 0} \frac{F(X_0 + t\vec{u}) - f(X_0)}{t}.$$

Como F é diferenciável em X_0, temos que

$$F(X_0 + H) = F(X_0) + DF(X_0).H + erro(H),$$

onde (.) é o produto matricial, $DF(X_0)$ é a matriz jacobiana de F e $erro(H)$ é tal que

$$\lim_{||H|| \to 0} \frac{erro(H)}{||H||} = \vec{0}.$$

Portanto, se F é diferenciável em X_0, fazendo $H = t\vec{u}$, e observando que $||H|| = ||t\vec{u}|| = |t|$, pois $\vec{u}$ é unitário, temos que

$$F(X_0 + t\vec{u}) \quad = \quad F(X_0) + DF(X_0).t\vec{u} + erro(t\vec{u}), \tag{1}$$

onde,

$$\lim_{|t| \to 0} \frac{erro(t\vec{u})}{|t|} = \vec{0},$$

que equivale a

$$\lim_{t \to 0} \frac{erro(t\vec{u})}{t} = \vec{0}. \tag{2}$$

Desta forma, utilizando (1) na definição de derivada direcional, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(X_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{F(X_0 + t\vec{u}) - F(X_0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{F(X_0) + DF(X_0).t\vec{u} + erro(t\vec{u}) - F(X_0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{tDF(X_0).\vec{u} + erro(t\vec{u})}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \left(DF(X_0).\vec{u} + \frac{erro(t\vec{u})}{t} \right) \qquad (3)
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo (2) em (3), concluímos que

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(X_0) = DF(X_0).\vec{u}.$$

$\square$

Exemplo 11.8.1: Determine a derivada direcional da função $F(x, y, z) = (x + y + z, x^2 + y^2 + z^2, x^3 + y^3 + z^3)$ no ponto $(1, 1, 1)$, na direção do vetor $(4, 0, 3)$.

Solução: Vimos no Exemplo 11.5.6 que F é diferenciável e que

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \end{pmatrix} \Rightarrow DF(1,1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, com $\vec{u} = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right)$, de acordo com o Teorema 11.7.1, segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(1,1,1) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 7/5 \\ 14/5 \\ 21/5 \end{pmatrix}
\end{aligned} \qquad (4)$$

$\heartsuit$

Aplicando o Teorema 11.2.1 à definição de derivada direcional, podemos seguir uma outra linha de raciocínio e concluir que o cálculo da derivada direcional de uma função vetorial de várias variáveis se reduz ao cálculo da derivada direcional de m funções reais de várias variáveis. Confira o teorema abaixo. Lembre-se que um vetor pode ser escrito em forma de linha ou coluna.

TEOREMA 11.8.2: Seja $F : Dom(F) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma função vetorial de várias variáveis, seja $X_0 \in Dom(F)$ e seja $\vec{u}$ um vetor unitário em $\mathbb{R}^n$. Então, a derivada direcional de F no ponto X_0 na direção do vetor $\vec{u}$ existe se, e somente se, existem as derivada direcionais de todas as suas funções coordenadas no ponto X_0 na direção do vetor $\vec{u}$. E, neste caso,

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(X_0) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial \vec{u}}(X_0), \dots, \frac{\partial f_m}{\partial \vec{u}}(X_0)\right).$$

Além disso, utilizando o Teorema 10.4.1, temos que

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(X_0) = (\nabla f_1(X_0) \cdot \vec{u}, \dots, \nabla f_m(X_0) \cdot \vec{u}) . \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

Exemplo 11.8.2: Resolva o Exemplo 11.8.1 utilizando o resultado visto acima.

Solução: Neste caso, temos que

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= x+y+z \\ f_2(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2 \\ f_3(x,y,z) &= x^3+y^3+z^3. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \nabla f_1(x,y,z) &= (1,1,1) \\ \nabla f_2(x,y,z) &= (2x,2y,2z) \\ \nabla f_3(x,y,z) &= (3x^2,3y^2,3z^2), \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \nabla f_1(1,1,1) &= (1,1,1) \\ \nabla f_2(1,1,1) &= (2,2,2) \\ \nabla f_3(1,1,1) &= (3,3,3). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \nabla f_1(1,1,1) \cdot \vec{u} &= (1,1,1) \cdot \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) = \frac{7}{5} \\ \nabla f_2(1,1,1) \cdot \vec{u} &= (2,2,2) \cdot \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) = \frac{14}{5} \\ \nabla f_3(1,1,1) \cdot \vec{u} &= (3,3,3) \cdot \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) = \frac{21}{5}, \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(1,1,1) &= (\nabla f_1(1,1,1) \cdot \vec{u}, \nabla f_3(1,1,1) \cdot \vec{u}, \nabla f_3(1,1,1) \cdot \vec{u}) \\ &= \left(\frac{7}{5}, \frac{14}{5}, \frac{21}{5}\right). \end{aligned}$$

♡